数理解析研究所講究録
407巻 1980年 19-26

非線形懐妊期間モデルの周期解

早稲田大学大学院（経研） 荒木 勝啓

1. モデルの概要

周期的な投資変動の発生要因を，投資財生産の受注から完成までのタイム・ラグに求める懐妊期間理論が，ふるくから提唱されている．基本的アイデアは，投資財に対する注文が現在の超過総需要圧力に基いて行なわれるのに対し，完成までに時間を要するので，生産された投資財が設備に付加されて生産のために稼動し始める時には過剰能力を生み出すようになっているというものである．このタイプのモデルとしてKalecki [1] の線形モデルがよく知られているが，ここでは非線形モデルを組むことによって展開してみたい．

前提として，粗投資注文（I）は，一定の部分（$\bar{I}$）と変動部分（J）より成る，すなわちt期において

$$I(t) = J(t) + \bar{I}$$

だけの粗投資注文がなされるものとする．Jを純投資と呼ぶ．

投資財の注文がなされてから完成するまでの期間すなわち懐妊期間をθとする．この時投資財生産部門にとって，各t時点で未完成受注高が

$$W(t)=\int_{t-\theta}^{t} I(\tau)\,d\tau$$

だけ存在することになる．この未完成受注高を毎期どれ位生産していくかというパターンは様々な可能性があるが，ここではKaleckiに従い，

$$B(t)=\frac{W(t)}{\theta}=\frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} I(\tau)\,d\tau$$

というパターンを採用する．この型の投資財生産が行なわれる時，$W(t)=B(t)\cdot\theta$という関係，(すなわち各期ごとに未完成分をθ期間で片付けてしまおうという目標をたてていること)が成り立ち，また仮に$J=0$の時には毎期一定水準$\bar{I}$の生産が実行されることになる．

さて投資財が完成すると設備が増大し経済の総生産能力は増大する．$\bar{I}$は一定の生産能力を保持し得るに足る投資部分すなわち補填投資部分であるとすれば，総生産能力(P)と投資の関係は，純投資Jを使って，

$$\dot{P}(t)=\psi\{J(t-\theta)\},\quad \psi'>0,\quad \psi(0)=0$$

$$\cdots\cdots\text{総生産能力創出効果} \tag{1}$$

のように表わすことができる．一方，投資注文そのものは現実の有効需要とならない．投資注文はそれが実際に生産され

賃金・利潤等の形で分配され支出される時に有効需要として実現される．そこで，投資に基き乗数過程を通して創出される総需要増加分は，生産 ― 分配 ― 支出の間にタイム・ラグが存在しないものとすれば，J でなく B を用いて

$$\dot{Y}(t) = \varphi\{\dot{B}(t)\},\quad \varphi' > 0,\quad \varphi(0) = 0$$

----総需要創出効果　(2)

または，

$$\dot{Y}(t) = \varphi\left[\frac{1}{\theta}\{J(t) - J(t-\theta)\}\right] \quad (3)$$

として表現される．

もし(1)式と(2)または(3)式がバランスして $\dot{P}(t) = \dot{Y}(t)$，すなわち

$$\psi\{J(t-\theta)\} = \varphi\left[\frac{1}{\theta}\{J(t) - J(t-\theta)\}\right] \quad (4)$$

が成り立つ時には，J の経路は均衡成長経路になる．仮に原モデルが線形式で，$\psi = 1/C$（C＝資本係数），$\varphi = 1/s$（s＝貯蓄率）で表わされているとすれば，モデルは，θ 期間中の「1＋成長率」が

$$J(t)/J(t-\theta) = 1 + \frac{s}{C}\theta$$

で示されるような，ハロッド＝ドーマー型モデルに帰着するであろう．

しかし一般的には供給側の条件と需要側の条件が一致する保証はなく，生じたギャップ $\dot{Y} - \dot{P}$ に基いて投資注文

の修正ないし調整，

$$\dot{J}(t)=f\left[\varphi\left\{\frac{1}{\theta}\left(J(t)-J(t-\theta)\right)\right\}-\psi\left\{J(t-\theta)\right\}\right] \tag{5}$$

が行なわれる．但しfは〔　〕の中を1つの変数とみた時に $f(0)=0$，$f'>0$ であるとする．適当な単位期間を選び，$\theta=1$ と置いて，f をあらためて af $(a>0)$ で置き換えると，(5)は

$$\dot{J}(t)=af\left[\varphi\left\{J(t)-J(t-1)\right\}-\psi\left\{J(t-1)\right\}\right] \tag{6}$$

と書くことができる．

2．周期解の存在条件の経済的インプリケーション

周期解の存在条件に関して次の定理が知られている．(1)

＜定理（伊藤〔2〕）＞

『$\dot{y}(t)=af(y(t),\ y(t-1)),\ t\geqq 0,$

$$y\,|\,[-1,\ 0]=\phi \tag{7}$$

が下記条件を満たす時，

$$\frac{\cos^{-1} m}{b\sqrt{1-m^2}}<a\leqq-\frac{1}{bmp}\log m \tag{8}$$

ならば，(7) は非自明な周期解を持つ．

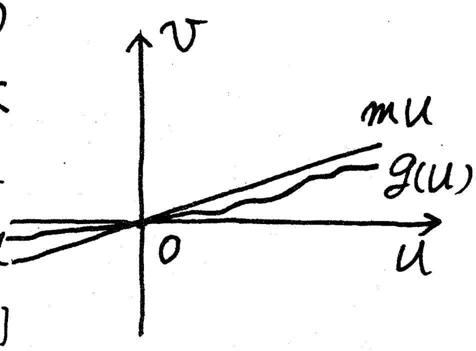
（条件）(a) f は連続的偏微分可能，(b) $\frac{\partial f}{\partial u}>0$，$\frac{\partial f}{\partial v}<0$，(c) $f(0,\ 0)=0$，(d) $f(u,\ v)$ は上に有界，(e) $f(u,\ v)=0$ は $v=g(u)$，$g(0)=0$

と一意的に解けて，$g(u)$ は連続単調増大．$g'(0)=m$ と置くと，ある $p \geqq 2$ に対して $0 \leqq m \leqq e^{-p}$，(f) $u \neq 0$ のとき $\frac{g(u)}{u} \leqq m$，(g) $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{u=v=0} = -b$，(h) $\left|\frac{f(u,v)}{u-g^{-1}(v)}\right| \leqq bmp$，(i) $a>0$』

モデル(6)式で，(a)〜(c)の条件は明らかに満たされる．また無限大の投資注文率は経済的に排除されるから，条件(d)も満たされるとみてよい．$J(t)=u$，$J(t-1)=v$ と置き，$\varphi(u-v)=\psi(v)$ とすると，φ，ψ の条件から，$u=0 \rightleftarrows v=0$ は明らか．$u-v=\varphi^{-1}\{\psi(v)\}$，

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{1+\varphi'^{-1}\psi'(v)} > 0 \qquad (9)$$

であるから，$v=g(u)$ は単調増大となる．条件(e)の後半が満たされるためには，(9)式から考えて，0点における限界総生産能力創出効果 $\psi'(0)$ がかなり大きくなくてはならない．次に(f)は，曲線 $g(u)$ が右図のように直線 mu より内側に存在することを要求している．これを満たす1つの十分条件としては，乗数効果の変動が少なく限界総生産能力創出効果が0点より離れる程大きくなるといった例が考えられよう[(2)]．最後に(h)の意味を考えるために，$f=0$ を全微分



して

$$\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{du}=-\frac{\partial f}{\partial u}$$

を導き，(g) を適用すると

$$bmp=p\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{u=v=0}$$

である．従って条件（h）は

$$\left|\frac{af}{u-g^{-1}(v)}\right|\leqq p\frac{\partial af}{\partial u}\Big|_{u=v=0}\equiv p\alpha \qquad (10)$$

と書くことができる．左辺は純投資注文量の経路が仮想的な均衡成長経路から乖離した場合の調整量（ $\dot{u}=af$ ）と乖離量の比率であり，この経済の一種の反応度ないし発散度を表わすものと考えてよい．右辺の α は0点における極限的なそれである．すなわち（10）式は，0点以外の発散度が0点における発散度と p との積よりも小さく抑えられているような，「適度な」反応関数 f の存在を要求していることになる．景気上昇に伴なう費用上昇や雇用面，金融面での困難性の上昇や，逆に負の純投資の継続に伴なうその逆の状況などを考慮すれば，そうした f の存在は現実性があるといえるであろう．以上の条件が満たされる時，係数 a の（8）式の範囲で，$\bar{I}$ を振動の中心とする周期的投資変動が発生する．

3．むすび

前節の条件のうち，最も重要な条件は$\psi'(0)$がかなり大きいということ，また条件の具体例としてψ'が0点より離れる程大きくなるということ，であった．この条件の意味を(6)式に戻って考えてみる．今Jが増加している状況を想定すると，$\varphi > \psi$であり，それがあるところで逆転してJの減少に向かうためには，Jが増加していった時に，ψが急激に増大してあるところでφを追い抜かなければならないということになる．しかもJ自体が上昇中に追いつくのであるから，$J(t)$よりも小さな$J(t-1)$の決定する$\psi(J(t-1))$が$\varphi(J(t)-J(t-1))$より大きくなっていくということになってくる．ψ'が大きいということはそのための条件に他ならない．そして，懐妊期間ののちに完成した設備が過剰な生産能力を生みそれが過剰生産をもたらす，という懐妊期間理論の中心的アイデアが，実はこのψ'の条件だったのである．同様に，前節で示されたψ'の相対的な安定性という条件の具体例も，急激に増減する生産能力に対して需要がそれに追随できない，という懐妊期間理論の説明のもう1つの柱を言い換えたものであることがわかるであろう

［注］

(1)　条件(h)は文献[2]ののちに訂正された条件である．

(2) ψ' の具体的な「大きさ」は m に依存するが，$p \geqq 2$ という条件の改善の可能性があるので，当面ただ「大きい」という抽象的な表現にとどめておく．

［参考文献］

[1] M. Kalecki, A Macrodynamic Theory of Business Cycles, Econometrica, Vol. 3, 1935.

[2] 伊藤 隆一「ある種の遅れ微分方程式の周期解について」学術研究 第27号，1978年．